数理解析研究所講究録
650巻 1988年 1-13

非線形波動から超伝導まで

放送大 戸田盛和
Morikazu Toda

§1. まえがき

ここで述べるのは，互いに相互作用をする二つ以上の非線形波動を考察しようとする試論である。物理学ではこのような問題が数多く存在する。超伝導現象もその一つであって，これは結晶あるいは低次元の電子系が格子振動あるいは電気分極などの場と相互作用して生じるものと考えられる。この相互作用によって二つの電子間に引力が生じ，いわゆるクーパー電子対ができる。BCS理論はこれを格子振動との相互作用としているが，別の可能性があるにちがいない。より広く相互作用を考察しなければならない。電子間の引力といえば中性分子間のvan der Waals力もそうであって，これは電磁場を介しての電子間の相互作用，すなわち電磁場と電子との相互作用による引力である。van der Waals力がF. Londonによって始めて解明されたことと，彼が始めて超伝導の巨視

的理論を提出したこととの関連は興味深い。へりうムの原子間引力は数度Kの凝縮相を保つだけであるが，例えばアルゴンのvan der Waals力は約90Kの液相を保つのに十分な引力である。このことは最近の90K超伝導体の発見と比べて大変面白く思われる。van der Waals力と超伝導現象との間に直接の関係はないであろうが，仲介する場があれば，一般に電子間に引力が生じるものであることは強調していい事柄と思われる。その意味で波動理論として広く相互作用をする二つ以上の非線形波動方程式系の研究を見直すのは意味があることと思われる。その結果，ソリトンのボース凝縮が超伝導現象にほかならないとする魅力的な想像が裏書きされればとも思う。

相互作用をもつ非線形系の問題は，もちろん今まで多くの研究者によって扱われている。その例は後にいくつか触れることになる。以前は多くの場合，相互作用をする波動系を一つの非線形方程式にまとめる方向がとられた。しかし最近では高階非線形方程式系をまとめて論じる理論の発展もあって，相互作用をする系を扱う方法も変化しているように思われる。これについても後に触れたい。一つの非線形波動方程式の可積分性を考えるだけでなく，相互作用をもつ方程式系の可積分性を考えることである。いずれにしても，ここで述べること

の多くはすでに知られている事柄を少し見方を変えて提示するにすぎないのかも知れないが，非線形波動理論の大きな発展のもたらした広い研究成果を相互作用のある物理系の考察に役立てる上でこのような考察も可能なのではないかと思う。この試論の方向で，より系統的な自格的理論ができることを期待したい。

超伝導現象の理論で有名な Ginzburg-Landau 方程式は秩序パラメタ ψ に対する巨視的な方程式であって

$$\alpha\psi+\beta|\psi|^2\psi+\frac{1}{2m^*}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-\frac{e^*}{c}A\right)^2\psi=0 \qquad (1.1)$$

と書ける。ここで α，β は温度による係数，A は磁場のベクトルポテンシャル，m^* と e^* は電荷のキャリヤー（電子対）の質量と電荷である。ミクロ的には，電子と相互作用する場を介しての電子間の協力的相互作用が非線形項 $\beta|\psi|^2\psi$ として取り入れられているわけである。高温超伝導体に対しても，このGL方程式をいかにして導出するかというのが理論の一つの方向である。

ソリトン理論ではGL方程式よりも，これに似た非線形シュレーディンガー方程式

$$i\psi_t+\psi_{xx}+\kappa|\psi|^2\psi=0 \qquad (1.2)$$

がよく研究されている。これも電子と他の場との相互作用を介しての電子間の相互作用が非線形項 $\kappa|\psi|^2\psi$ として取り入れられていると見ることができる。別の例としてプラズマのイオン・電子系を挙げよう。Washimi-Taniuti により方程式を無次元化するとイオン流体の密度 n, その速度 u に対し

$$n_t + (nu)_x = 0 \qquad \text{(連続の式)}$$

$$u_t + u u_x = E \qquad \text{(運動方程式)}$$

$$(n_e)_x = -n_e E \qquad \text{(圧力勾配と電場の力の釣り合い)}$$

$$E_x = n - n_e \qquad \text{(ポアソン方程式)} \qquad (1.3)$$

を得る[1]。ここで n_e は電子密度, E はこれによる電場であり, 電子の質量は小さいとしてその慣性項を無視した。n と E を消去すると方程式系

$$\left.\begin{aligned} &u_t + u u_x + \frac{1}{n_e}(n_e)_x = 0 \\ &(n_e)_t + (n_e u)_x - P_x = 0 \\ \text{ただし} \quad &P = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{n_e}\frac{\partial n_e}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

を得る。ここで $\xi = \epsilon^{1/2}(x-t)$, $\eta = \epsilon^{3/2}x$ とおき, 逓減摂動法により, 展開

$$\left.\begin{aligned} u &= \epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)} + \cdots \\ n_e &= 1 + \epsilon n_e^{(1)} + \epsilon^2 n_e^{(2)} + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

を代入すると，

$$u^{(1)} = n_e^{(1)} \tag{1.6}$$

$$\left.\begin{aligned} &u_\eta^{(1)} + u^{(1)} u_\xi^{(1)} + u_{\xi\xi\xi}^{(1)} = 0 \\ &(n_e^{(1)})_\eta + n_e^{(1)} (n_e^{(1)})_\xi + (n_e^{(1)})_{\xi\xi\xi} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

を得る。イオン流体の速度 u と電子密度 n_e とは同じKdV方程式にしたがうことがわかる。しかも $u^{(1)} = n_e^{(1)}$ すなわちこれらは同じ位相で運動する。この場合にも，非線形項 $u^{(1)} u_\xi^{(1)}$ はイオンが電子を介して自分自身に影響する相互作用を意味し， $n_e^{(1)} (n_e^{(1)})_\xi$ も同様の影響を表している。なおこの系では $n^{(1)}$, $-\int E^{(1)} d\xi$ も同位相で同じKdV方程式にしたがう。

§2. 二つの格子とBäcklund変換

相互作用をする二つの場の一番簡単な例として線形方程式系

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial B}{\partial x} \tag{2.1}$$

を挙げよう。これは y 方向の磁場 B と z 方向の電場 E の相互作用を表す。同様の式は流体の速度と圧力の関係など，

極めて多くの問題に現れ，これらは二つの場の相互作用を記述するものとみなすことができる。(1.4)もその一例である。

(2.1)の E と B に相当する不連続な場 u_n と v_n $(n=1,2,\dots)$ を考えると，(2.1)を非線形にした方程式の最も簡単なものとして Kac と Moerbeke の方程式[2)]

$$\frac{du_n}{dt}=\frac{1}{A}\left(e^{v_{n-1}}-e^{v_n}\right)$$

$$\frac{dv_n}{dt}=A\left(e^{u_n}-e^{u_{n+1}}\right) \qquad (2.2)$$

がある(A は定数)。この方程式の特解として，相互作用によって一方が他方を引きずる(あるいは押して行く)キンクとアンチキンク

$$e^{u_n}=\cosh\kappa-\sinh\kappa\cdot\tanh(\kappa n+\beta t)$$

$$e^{v_n}=\cosh\kappa+\sinh\kappa\cdot\tanh(\kappa n+\beta t) \qquad (2.3)$$

$(\beta=\sinh\kappa)$ がある。

さらに

$$-(u_n+v_n)=Q_{n+1}-Q_n$$

$$-(v_n+u_{n+1})=q_{n+1}-q_n \qquad (2.4)$$

とおけば(2.2)は

$$dQ_n/dt=Ae^{Q_n-q_n}+\frac{1}{A}e^{q_{n-1}-Q_n}+c$$

$$dq_n/dt=Ae^{Q_n-q_n}+\frac{1}{A}e^{q_n-Q_{n+1}}+c \qquad (2.5)$$

となり，これは二つの場 Q_n と q_n の相互作用を表す方程式とみなせる．ここで c は無限遠における条件で定まる定数である。

(2.5) は二つの指数格子

$$d^2Q_n/dt^2 = e^{Q_{n-1}-Q_n} - e^{Q_n-Q_{n+1}}$$

$$d^2q_n/dt^2 = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}} \qquad (2.6)$$

の間の Bäcklund 変換である。このように，Bäcklund 変換は相互作用をしている二つの場を記述する方程式とみることができるのである．

なお Bäcklund 変換 (2.5) は相互作用をしている振動子系として記述することができる。座標 f_n と運動量 g_n をもつ振動子

$$df_n/dt = c_n^{-1} g_n - \frac{c}{2} f_n$$

$$dg_n/dt = -c_{n-1} f_n + \frac{c}{2} g_n \qquad (2.7)$$

の間に条件

$$g_{n+1} = c_n f_n \qquad (2.8)$$

をおき，

$$c_n = g_{n+1}/f_n = e^{Q_n}, \qquad g_n/f_n = e^{q_n} \qquad (2.9)$$

と書くと (2.7), (2.8) から

$$dQ_n/dt = -e^{Q_n-q_n} - e^{q_{n-1}-Q_n} + c$$

$$dq_n/dt = -e^{Q_n-q_n} - e^{q_n-Q_{n+1}} + c \qquad (2.10)$$

を得る。これは(2.5)で $A=-1$ とおいたBäcklund変換である。したがって(2.7), (2.8)は相互作用をしている二つの場(2.9)を表している。Q_n, g_n はそれぞれ指数格子の運動方程式にしたがう。

さらに(2.8), (2.7)を用いて dg_{n+1}/dt を作ると

$$c_n^{-1}\dot{c}_n = \dot{Q}_n = P_n \tag{2.11}$$

$(\,\dot{}\, = d/dt)$ と書いて

$$f_{n+1} = (P_n + \lambda) f_n + c_n^{-1} g_n \tag{2.12}$$

を得る。これからわかるように指数格子の運動方程式は

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n + \lambda & c_n^{-1} \\ c_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda/2 & c_n^{-1} \\ -c_{n-1} & \lambda/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

と書くことができる。[3)]

また

$$x_n = e^{Q_n}, \qquad y_n = e^{g_n} \tag{2.14}$$

とおくと，(2.5)は二つの場 x_n, y_n の相互作用を表す式

$$\begin{aligned} dx_n/dt &= (c + y_n^{-1} x_n + y_{n-1} x_n^{-1})\, x_n \\ dy_n/dt &= (c + x_{n+1}^{-1} y_n + x_n y_n^{-1})\, y_n \end{aligned} \tag{2.15}$$

を与える。

§3. 同じタイプに属する二つの場

相互作用をする二つの場 u と φ が

$$u_t+(u^2)_x+u_{xxx}=0$$
$$\varphi_t+(\varphi^2)_x+\varphi_{xxx}=-2(u\varphi)_x \tag{3.1}$$

で与えられるとしよう。第1式は u に対する KdV 方程式，第2式はこの u の場をある種の外力とする KdV 方程式である。ここで

$$\varphi=v-u \tag{3.2}$$

とおくと v は KdV 方程式

$$v_t+(v^2)_x+v_{xxx}=0 \tag{3.3}$$

を満たす。したがって φ は自由振動に相当する v と，u による強制振動とみなせる $-u$ との和で与えられることがわかる。

同様に

$$u_t+2(u^2)_x+u_{xxx}=(\varphi^2)_x$$
$$\varphi_t+3(\varphi^2)_x+\varphi_{xxx}=-4(u\varphi)_x \tag{3.4}$$

は二つの場 u と φ の相互作用を表すが，

$$v = 2u + \varphi$$
$$w = 2(u + \varphi) \qquad (3.5)$$

とおくと v と w は同じ KdV 方程式

$$v_t + (v^2)_x + v_{xxx} = 0$$
$$w_t + (w^2)_x + w_{xxx} = 0 \qquad (3.6)$$

を満たす。この式の解を用いてもとの u, φ は

$$u = 2v - w$$
$$\varphi = w - u \qquad (3.7)$$

で与えられることになる。

同様なことは相互作用をする Boussinesq 方程式

$$u_{tt} = u_{xx} + (u^2)_{xx} + u_{xxxx}$$
$$\varphi_{tt} = \varphi_{xx} + (\varphi^2)_{xx} + \varphi_{xxxx} + 2(u\varphi)_{xx} \qquad (3.8)$$

あるいは

$$u_{tt} = u_{xx} + 2(u^2)_{xx} + u_{xxxx} - (\varphi^2)_{xx}$$
$$\varphi_{tt} = \varphi_{xx} + 3(\varphi^2)_{xx} + \varphi_{xxxx} + 4(u\varphi)_{xx} \qquad (3.9)$$

などについてもいえる。

より一般的には，L を線形の微分演算子とするとき

$$L u + \frac{\partial^n}{\partial x^n}(A u^2 + B\varphi^2 + 2Cu\varphi) = 0$$

$$L\varphi + \frac{\partial^n}{\partial x^n}(D u^2 + E\varphi^2 + 2Fu\varphi) = 0 \qquad (3.10)$$

は，係数A，B，C，D，E，Fがある条件を満す定数であれば分離されて

$$L v + \alpha\frac{\partial^n}{\partial x^n} v^2 = 0$$

$$L w + \beta\frac{\partial^n}{\partial x^n} w^2 = 0 \qquad (3.11)$$

に帰することができる。u，φ は v と w の線形結合で与えられるわけである。

これらは同じ型の非線形系に帰せられる場合で，いわば縮退した二つの場の相互作用であるといえるだろう。

これに対して，縮退していない二つの場，いいかえれば，異なる型の非線形系の相互作用が考えられる。これを次に考察しよう。

§4. 同じヒエラルヒーの二つの場

相互作用をする二つの場 u，v として

$$u_t - u_{xx} = 2v_x$$

$$v_t + v_{xx} = 2u_x - 2uu_x - \frac{2}{3}u_{xxx} \qquad (4.1)$$

を考えよう。これは複雑にみえるが，v を消去するとBoussinesq方程式

$$u_{tt} = 4u_{xx} - 4(uu_x)_x + \frac{1}{3}u_{xxxx} \tag{4.2}$$

を得る。この解を用いれば，v は直ちに得られるから，(4.1) は解けることになる。

Boussinesq 方程式は高階 KP 方程式系に属する。実は (4.1) は KP ヒエラルヒーの 3-reduction の方程式系であり，この枠内で解かれたのである。前節§3で扱った同形の方程式の間の相互作用に対して，ここでは同じ KP 系の方程式によって相互作用をもつ二つの系が解かれた。

高階 KP 系の 4-reduction による相互作用系の扱いは，薩摩・広田によって示されている[4)]。4-reduction の KP 系は

$$
\begin{aligned}
&u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} + 3uu_x + 3(-\phi^2+\omega)_x \\
&\phi_t = -\frac{1}{2}\phi_{xxx} - 3u\phi_x \\
&\omega_t = -\frac{1}{2}\omega_{xxx} - 3u\omega_x \\
&u_y = 2\phi_{xx} \\
&\phi_y = -2\phi^2 + 2\omega
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

と書ける。そして解は $f(x, y, t)$ を用いて

$$
\begin{aligned}
u &= (\log f)_{xx} \\
\phi &= f_y/2f \\
\omega &= f_{yy}/4f
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

によって与えられる。多ソリトン解では $y=0$ とおくと $\omega=0$ になるので，相互作用をする二つの場 u, ϕ に対する式

$$u_t - \frac{1}{4}(u_{xxx} + 3uu_x) + 3(\phi^2)_x = 0$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}\phi_{xxx} + 3u\phi_x = 0 \qquad (4.5)$$

の多ソリトン解が得られる。

さらに高階のKP系を考察することにより，相互作用をする二つ，あるいは二つ以上の場の可積分系を研究することができるであろう。

文献

1) H. Washimi and T. Taniuti : Phys. Rev. Lett. 17 (1966) 996.

2) M. Kac and P. van Moerbeke : Adv. in Math. 16 (1975) 160.

3) cf. L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan : "Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons" (Springer-Verlag 1987) p. 294.

4) J. Satsuma and R. Hirota : J. Phys. Soc. Japn. 51 (1982) 3390.